La circonferenza nel piano cartesiano

Politecnico Open unix Labs

13 maggio 2013

Indice

1 Definizione e proprietà

Prima alcune definizioni:

Circonferenza Luogo di punti a distanza θ da un punto detto **centro**.

Cerchio Area racchiusa in una circonferenza, circonferenza inclusa.

Raggio Segmento da un punto della circonferenza al suo centro; per estensione, per raggio si intende anche la lunghezza dello stesso.

Alcune proprietà:

- Dati tre punti non allineati, vi passa una e una sola circonferenza.
- Due circonferenze possono essere:
  - secanti, se hanno due punti di intersezione. La retta passante per i punti di intersezione è detta *asse radicale*.
  - tangenti, se hanno un solo punto di intersezione.
- Dati due circonferenze di centro A, B e di raggio θ_A, θ_B, se $\overline{AB} = \theta_A + \theta_B$ allora le circonferenze sono tangenti.

2 Luogo dei punti

Dato un piano cartesiano bidimensionale xOy, la *circonferenza* di raggio unitario con centro dell'origine è

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{1}$$

La circonferenza di raggio θ è invece:

$$x^2 + y^2 = \theta^2.$$

Usando una trasformazione di translazione:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x - x_0 \\ y &\rightarrow y - y_0 \end{aligned}$$

...si ottiene la circonferenza di centro (x_0, y_0):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \theta^2$$

espressione che si può trovare espansa in questa forma:

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \tag{2}$$

2.1 Asse radicale di due circonferenze

Date due circonferenze[1] 1, 2 in forma 2, possiamo trovarne facilmente l'asse radiale sottraendo le equazioni delle circonferenze:

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\, x + (\beta_1 - \beta_2)\, y + (\gamma_1 - \gamma_2) = 0$$

DIMOSTRAZIONE Siano 1, 2 circonferenze secanti e $C_1(x, y), C_2(x, y)$ le rispettive equazioni in forma 2; esse hanno allora due punti di intersezione $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ per cui $C_1(\mathbf{A}) = C_2(\mathbf{A}) = 0 = C_1(\mathbf{B}) = C_2(\mathbf{B})$. Allora $C_1 - C_2$ è la retta con la proprietà ricercata.

3 Area del cerchio unitario

Risolvendo la 1 rispetto a y otteniamo:

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Calcolando l'integrale, abbiamo:

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x \\ &= 2 \left[x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x \right]_{-1}^{1} \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

[1] Questa costruzione vale anche per A, B non secanti!